

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

A1. Από το σχολικό βιβλίο, σελίδα 135.

A2. Από το σχολικό βιβλίο, σελίδα 51.

A3. Από το σχολικό βιβλίο, σελίδα 23.

A4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $f(x+1)=(x+1)e^{-x} \Leftrightarrow f(y)=ye^{1-y}$

Θέτω $y=x+1 \Leftrightarrow x=y-1$

B2. f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο πολυωνυμικής – εκθετικής

$$f'(x)=x \cdot e^{1-x}(1)+e^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

f αύξουσα στο $(-\infty, 1]$

f φθίνουσα στο $[1, +\infty)$

f παρουσιάζει στη θέση $x_0=1$ μέγιστο ίσο με $f(1)=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

B3. f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο πολυωνυμικής – εκθετικής

$$f'(x)=-e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}(-1)=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=(-2+x)e^{1-x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$$

f στρέφει τα κοίλα:

κάτω στο $(-\infty, 2]$

άνω στο $[2, +\infty)$

f παρουσιάζει καμπή στο $x_1=2$ με $f(2)=\frac{2}{e}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$			

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1-x} = -\infty \end{aligned} \right\} f \text{ δεν έχει ασύμπτωτη στο } -\infty$$

Αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} \stackrel{u=1-x}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\text{DLH}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

Άρα $y=0$ ασύμπτωτη στο $+\infty$.

B4. $f((-\infty, 1]) \stackrel{f \text{ αύξουσα}}{=} (\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x), f(1)) = (-\infty, 1] = B_1$

$f([1, +\infty)) \stackrel{f \text{ φθίνουσα}}{=} (\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x), f(1)) = (0, 1] = B_2$

$f(\mathbb{R}) = B_1 \cup B_2 = (-\infty, 1]$

Αν $\lambda \leq 0$

$\lambda \in B_1$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, 1) : f(x_1) = \lambda$

$\lambda \notin B_2$ άρα $f(x) = \lambda$ αδύνατη

Άρα η εξίσωση έχει μία ρίζα.

Αν $\lambda \in (0, 1)$

$\lambda \in B_1$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-\infty, 1) : f(x_1) = \lambda$

$\lambda \in B_2$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty) : f(x_2) = \lambda$

Άρα η εξίσωση έχει δύο ρίζες.

Αν $\lambda = 1$ $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x = 1$ λόγω ακρότατης τιμής.

Αν $\lambda > 1$ $\lambda \notin B_1$, $\lambda \notin B_2$, άρα $f(x) = \lambda$ αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x < 0$ η f συνεχής ως πολυωνυμική

Για $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$ η f συνεχής ως τριγωνομετρική

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - 1 + 1) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x &= \sin 0 = 1 \end{aligned} \right\} f \text{ συνεχής στο } x=0$$

Άρα f συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(ax^2 - 3x - 1)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

Άρα f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$.

Γ2.

(i) f συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$

f παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ ως τριγωνομετρική

$$f(0)=1$$

$$f(\frac{3\pi}{2})=\sin \frac{3\pi}{2}=0$$

Άρα δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Rolle.

$$(ii) 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} : f'(x) = -\eta\mu x = 0$$

$$x=\pi \text{ άρα } \xi=\pi$$

$$\Gamma 3. \text{ Για } x < 0 \quad f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$$

$$\Delta = 36 + 12a < 0 \text{ αφού } a < -3$$

Άρα $f'(x)$ ομόσημο του $3a < 0$

Οπότε $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0)$.

$$\begin{aligned} \Gamma 4. \quad x < 0 \quad f'(x) &= 3ax^2 - 6x - 1 < 0 \quad \forall x < 0 \\ x = 0 \quad f &\text{ δεν είναι παραγωγίσιμη} \\ x > 0 \quad f'(x) &= -\eta\mu x = 0 \quad x = \pi \text{ αφού } x \in (0, \frac{3\pi}{2}). \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	π	$+\frac{3\pi}{2}$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$				

Ολ. Ελαχ.
 $f(\pi) = -1$

$$\text{Άρα } f(x) \geq -1 \quad \forall x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}).$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\Delta 1. \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0, \quad x \in (0, +\infty)$$

$$\text{Έστω } K(x) = \ln x - \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

Η K συνεχής στο $[1, e]$.

$$K(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = -1 < 0$$

$$K(e) = \ln e - \frac{1}{e} = e - \frac{1}{e} > 0$$

$$K(1)K(e) < 0$$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (1, e)$ ώστε $K(x_0) = 0$.

$$K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ άρα η } K \text{ γνησίως αύξουσα οπότε η ρίζα είναι μοναδική.}$$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}$.

Από Δ1 έχω $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = 0$.

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		Ολ. Ελαχ.	

Ελάχιστο το $f(x_0) = (\ln x_0)(x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = x_0 \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = 1 - 1 = 0$

Δ3. Οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν εξισώσεις: $\psi = xe^{-x}$ και $\psi = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ αντίστοιχα.

Για να βρω τις τετμημένες των σημείων τομής λύνω την εξίσωση $xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$ **(1)**

1. Αν $x \leq 0$ η **(1)** είναι αδύνατη
επειδή $xe^{-x} \leq 0$ ενώ $\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0$.

2. Αν $x > 0$ από την **(1)** έχω

$$\ln(xe^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1)(\ln x_0 - \ln e) \Leftrightarrow \ln x - x = \ln x_0(x+1) - x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\ln x = \ln x_0(x+1) - 1 \Leftrightarrow \ln x_0(x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

Επειδή $f(x_0) = 0$ και η f έχει ρίζα μόνο το x_0 επειδή $x < x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0)$ και

$x > x_0 \Leftrightarrow f(x) > f(x_0)$.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με τετμημένη x_0 .

Πρέπει να δείξω ότι: $g'(x_0) = h'(x_0)$.

$$g'(x_0) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} (\ln x_0 - 1)$$

$$\text{Άρα } g'(x_0) = (1-x_0)e^{-x_0}$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = x_0 e^{-x_0} \left(\frac{1-x_0}{x_0}\right) = e^{-x_0} (1-x_0) = g'(x_0)$$

$$(\text{Ισχύει: } g(x) = h(x) \Leftrightarrow x_0 e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1})$$

2^{ος} τρόπος

Για να έχουν οι γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $A(a, \beta)$ πρέπει $f(a)=g(a)$ $f'(a)=g'(a)$.

Λύνω το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ \text{και} \\ f'(x)=g'(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \\ e^{-x}(1-x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}(\ln x_0 - 1) = \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \\ e^{-x}(1-x) = xe^{-x}\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \\ 1-x = x\left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \\ 1-x = \frac{x}{x_0} - x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \\ \frac{x}{x_0} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = x_0$$

Η τιμή αυτή επαληθεύει και την πρώτη εξίσωση του συστήματος.

Δ4. Η απόσταση των σημείων A και B είναι $d(A,B) = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x)$, $x \in (0, +\infty)$

Θέτω $\omega(x) = f(x) - \varphi(x)$.

Η ω παρουσιάζει στο x_0 ελάχιστο και x_0 εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η ω είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και από Θ. Fermat ισχύει:

$\omega'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$ άρα το x_0 κρίσιμο σημείο.

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε επειδή είναι συνεχής το x_0 κρίσιμο σημείο.

ΣΧΟΛΙΟ:

Τα φετινά θέματα είχαν σαφή διατύπωση και απαιτούσαν γνώση της εξεταστέας ύλης. Τα θέματα Α, Β, Γ και Δ1, Δ2 δεν είχαν ιδιαίτερη δυσκολία και μπορούσε εύκολα να τα αντιμετωπίσει ένας υποψήφιος.

Τα θέματα Δ3, Δ4 δυσκόλεψαν τους υποψήφιους, αλλά και σε αυτά οι καλά προετοιμασμένοι δεν αντιμετώπισαν πρόβλημα.

Γενικά τα φετινά θέματα δεν είχαν ιδιαίτερες δυσκολίες, ούτε απαιτούσαν ιδιαίτερα τεχνάσματα για τη λύση τους.

Επιμέλεια

Ανδρέου Α. – Ζαντιώτη Ε. – Καρπούζης Γ. – Καρτσώνη Κ. – Νασιόπουλος Σ.